

# METHODES DE QUASI MONTE-CARLO POUR L'EVALUATION DE STRATEGIES D'INVESTISSEMENTS

## QUASI MONTE-CARLO METHODS FOR THE NUMERICAL ASSESSMENT OF INVESTMENTS PLANS

M. Baudin, J. Demgne, W. Lair, J. Lonchamp  
EDF R&D – 6 quai Watier 78401 Chatou, France  
Tel : +33 (0)1 30 87 91 99  
michael.baudin@edf.fr  
jeanne.demgne@edf.fr / jeanne.demgne@univ-pau.fr  
william.lair@edf.fr  
jerome.lonchamp@edf.fr

S. Mercier  
Lab. de Mathématiques et de leurs Applications  
Université de Pau et des Pays de l'Adour  
Avenue de l'université 64013 Pau cedex, France  
Tel : +33 (0)5 59 40 75 37  
sophie.mercier@univ-pau.fr

### Résumé

L'évaluation d'une stratégie d'investissements en maintenance préventive nécessite la quantification d'indicateurs économiques permettant de décrire le gain espéré ainsi que les risques économiques associés. Les simulations de Monte-Carlo sont souvent utilisées dans ce cadre. Cependant, elles nécessitent un temps de calcul important pour obtenir des résultats suffisamment précis. Lorsque l'objectif n'est plus simplement d'évaluer une stratégie candidate mais de déterminer la stratégie optimale, les simulations de Monte-Carlo ne sont plus adaptées. En effet, couplée à un algorithme d'optimisation, cette méthode nécessiterait des calculs trop longs. Nous présentons dans cet article des méthodes alternatives permettant d'obtenir des résultats précis plus rapidement : les méthodes de quasi Monte-Carlo.

### Summary

In preventive maintenance, the assessment of investments plan needs to measure economics indicators in order to describe the expected gain as well as the associated economics risks. Monte-Carlo simulations are often used in this context. However, they require a large computational time to obtain accurate results. When the goal is not only to assess an applicant strategy but to determine the optimal one, Monte-Carlo simulations are not appropriate. Indeed, the Monte-Carlo method would require a too long computational time within an optimization algorithm. We present in this paper an alternative method which provides accurate results more quickly than the MC method: quasi Monte-Carlo methods.

---

### Introduction

La maintenance des actifs industriels n'est plus considérée comme un centre de coûts mais comme un levier pour créer de la valeur ajoutée, en réduisant par exemple les durées d'indisponibilité. Pour cela, il est nécessaire de construire des stratégies d'investissements de plus en plus complexes qui prennent en compte l'état vieillissant du matériel afin d'anticiper les défaillances. Dans notre contexte, une stratégie d'investissements définit les dates de maintenance préventive et de commandes de pièces de rechange d'un parc de composants. Les pièces de rechange alimentent un stock commun à tous les composants du parc. Pour déterminer si une stratégie d'investissements candidate est économiquement intéressante, il est nécessaire de quantifier des indicateurs économiques traduisant le gain espéré par rapport à la stratégie sans investissement. La stratégie sans investissement est alors considérée comme la stratégie de référence. Les indicateurs utilisés dans notre article sont issus de la Valeur Actuelle Nette (VAN). La VAN représente la différence entre les flux financiers associés à la stratégie de référence et ceux associés à la nouvelle stratégie à évaluer (par exemple : remplacement des composants à une date donnée  $\tau$ , qui peut être aléatoire ou fixée). Les gains générés par la nouvelle stratégie peuvent être des gains effectifs (augmentation de la production) ou des pertes évitées (réduction de l'indisponibilité). Une VAN positive traduit que les investissements permettent de réduire les coûts d'exploitation et de maintenance alors qu'une VAN négative signifie que le coût des investissements est trop élevé et que l'économie réalisée n'est pas suffisante pour le couvrir. La VAN est une variable aléatoire car elle dépend des dates de défaillances des composants, qui sont elles même des variables aléatoires. Ainsi pour chaque stratégie, il est possible d'avoir des situations induisant des valeurs de VAN positives et d'autres induisant des valeurs de VAN négatives. L'espérance de la VAN est un premier indicateur permettant de comparer deux stratégies mais il n'est pas suffisant pour mesurer le risque économique. La probabilité que la VAN soit négative est le deuxième indicateur auquel nous nous intéressons car il traduit la probabilité de regretter l'investissement effectué. Sur la figure 1, nous avons représenté les densités de probabilité de deux VAN correspondant à des stratégies différentes (VAN 1 et VAN 2). Comme cela peut être observé sur cette figure, la VAN moyenne de la stratégie 2 est supérieure à celle de la stratégie 1. En revanche, la probabilité que la VAN soit négative est plus élevée pour la stratégie 2. Ainsi, selon l'aversion au risque du décideur, la stratégie 2 n'est pas forcément la plus intéressante. Notre but final est alors d'optimiser notre stratégie d'investissements par rapport à la VAN moyenne, sous une contrainte portant sur la probabilité de regret (du type, la probabilité de regret est inférieure à un seuil qui est fixé).

La quantification de la loi de la VAN nécessite une modélisation fine de l'évolution stochastique du parc de composants et plus précisément des coûts aléatoires associés au parc soumis aux deux politiques à comparer. De par l'historique commun aux deux stratégies avant le premier investissement, les coûts associés sont dépendants. Évaluer la loi de la VAN revient donc à évaluer la distribution de la différence de deux variables aléatoires dépendantes. L'évolution d'un parc de composants peut être modélisée à

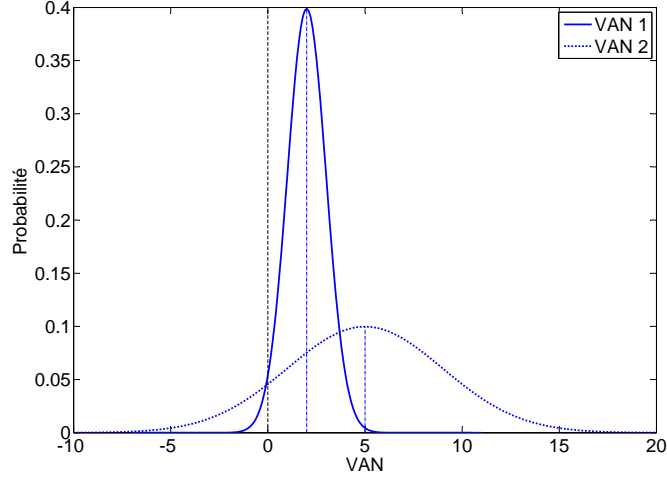


Figure 1. Comparaison de deux densités de probabilité de la VAN

l'aide de processus de Markov déterministes par morceaux (PDMP : Piecewise Deterministic Markov Process, Davis, 1984). Les PDMP sont des processus utilisés en fiabilité dynamique pour modéliser des composants en interaction avec leur environnement. Dans notre cas, l'environnement correspond aux âges ou aux dates des prochaines pannes des composants, ou aussi aux dates de réapprovisionnement des pièces de rechange. Pour quantifier la loi d'un PDMP et les quantités associées, il est possible d'utiliser des schémas de volumes finis comme dans (Lonchamp, 2005 ; Eymard et al., 2008 ; Lair et al., 2011). Ces méthodes nécessitent cependant une grande place mémoire, ainsi qu'un effort conséquent de programmation dès que le nombre de composants dépasse 3 ou 4. Les cas industriels visés comportant beaucoup plus de composants (au moins 10), ces méthodes ne semblent donc pas adaptées à notre problématique.

Plus classiquement, on peut aussi utiliser des simulations de Monte-Carlo pour évaluer les quantités d'intérêt. Ces simulations sont basées sur la structure d'un PDMP (Davis, 1984) : un PDMP est un processus de saut et les états successifs visités par le PDMP forment une chaîne de Markov. De plus, un PDMP évolue de manière déterministe entre deux sauts, de sorte que la connaissance des états visités par la chaîne de Markov permet de reconstruire tout le processus. Pour simuler l'évolution d'un PDMP, il suffit donc de simuler la chaîne de Markov associée. Les simulations de Monte-Carlo nécessitent cependant de longs temps de calcul, ce qui peut être rédhibitoire lorsqu'il s'agit de les coupler à un algorithme d'optimisation. Dans cet article, nous nous intéressons à deux alternatives basées sur la méthode de quasi Monte-Carlo, qui consiste à remplacer les variables aléatoires de loi uniforme utilisées dans les simulations de Monte-Carlo par des suites déterministes ayant de bonnes propriétés.

Nous commençons d'abord par présenter le modèle décrivant un parc de composants vieillissants soumis à des maintenances correctives et préventives. Ensuite, nous faisons une présentation des différentes méthodes et nous terminons par des résultats numériques obtenus sur des exemples méthodologiques qui nous ont permis d'illustrer les méthodes quasi Monte-Carlo et leurs performances.

## Modélisation et caractérisation de la VAN

### 1 Modélisation d'un parc de composants

Comme nous l'avons défini précédemment, la VAN correspond à la différence de coûts entre deux stratégies. Nous commençons par présenter le modèle permettant d'évaluer le coût d'une stratégie d'investissements.

Dans notre cadre, l'évaluation du coût d'une stratégie d'investissements s'effectue sur un parc de composants identiques soumis à des remplacements correctifs et préventifs, avec un même stock de pièces de rechange. Le parc de composants est défini par les variables suivantes :

- $I_t$  : l'état des composants à la date  $t$ ,
- $X_t$  : les dates de futures pannes des composants à l'instant  $t$ ,
- $S_t$  : le stock de pièces de rechange à l'instant  $t$ ,
- $D_t$  : les futures dates d'arrivée de pièces de rechange à l'instant  $t$ ,
- $C_t$  : le coût total actualisé à la date  $t$ .

Le processus  $(Z_t)_{t \geq 0} = (I_t, X_t, S_t, D_t, C_t, t)_{t \geq 0}$  ainsi constitué, où  $t$  représente le temps, est un PDMP à valeurs dans  $E \times \mathbb{R}_+^m \times F \times \mathbb{R}_+^{p+2}$ . Les ensembles  $E$  et  $F$  sont finis ou dénombrables.  $E$  représente les différentes combinaisons d'états des composants du parc,  $m$  est le nombre de composants du parc et  $p$  le nombre de commandes de pièces de rechange en cours. La chaîne de Markov associée est caractérisée par  $(Z_n)_{n \geq 0} = (I_{T_n}, X_{T_n}, S_{T_n}, D_{T_n}, C_{T_n}, T_n)_{n \geq 0}$  où  $(T_n)_{n \geq 0}$  est la suite des instants de sauts du processus  $(Z_t)_{t \geq 0}$ . Les sauts peuvent être induits par les défaillances des composants ou par l'arrivée d'une pièce de rechange. Nous allons maintenant présenter une analyse de la loi de la VAN.

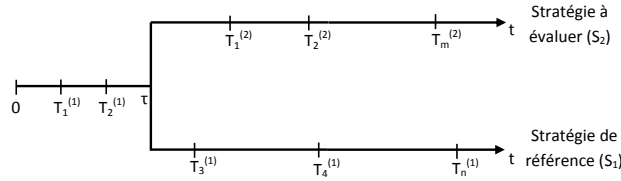


Figure 2. Comparaison de deux stratégies

## 2 Caractérisation de la Valeur Actuelle Nette

Nous souhaitons évaluer la distribution de la VAN sur un horizon de temps fixé d'exploitation d'un parc de composants identiques. Comme dit dans l'introduction, la VAN est définie comme la différence entre les coûts actualisés induits par une stratégie de référence et une stratégie à évaluer. La VAN est donc une fonction de deux PDMP dépendants à travers un historique commun jusqu'à  $\tau$ . L'évolution de ces stratégies dans le temps est représentée dans la figure 2. Sur cette figure, le paramètre  $\tau$  représente le premier instant où les coûts des deux stratégies divergent. Par exemple,  $\tau$  est la date de remplacement préventif d'un composant du parc dans la stratégie à évaluer (stratégie 2). Avant l'instant  $\tau$ , les différents événements se produisent au même moment dans les deux stratégies et par conséquent, la VAN est nulle. Après l'instant  $\tau$ , nous émettons l'hypothèse suivante : sachant l'état des composants du parc et l'état du stock à l'instant  $\tau$ , l'évolution des deux stratégies dans le temps est indépendante. Cette hypothèse se justifie en supposant que lorsque l'on effectue un investissement, par exemple le remplacement préventif d'un composant, le cours des événements futurs change. En effet, la pièce de rechange utilisée pour ce remplacement ne sera pas utilisée pour un autre composant. Les conditions d'exploitation étant différentes d'un site de production à l'autre, les instants des futures défaillances peuvent donc être supposés indépendants. Ainsi, évaluer la VAN sur un horizon de temps fixé revient à évaluer les coûts des deux stratégies à partir de l'instant  $\tau$ .

Si on note  $C_t^{(i)}$  le coût cumulé actualisé sur  $[0, t]$  associé à la stratégie  $S_i$ , pour  $i = 1, 2$ . On cherche à déterminer la loi de

$$VAN(t) = C_t^{(1)} - C_t^{(2)}$$

où  $t$  est fixé.

On suppose  $\tau$  déterministe et on a pour  $t < \tau$  :

$$VAN(t) = 0$$

Ainsi dans toute la suite,  $t \geq \tau$ .

Soit  $F_{VAN(t)}$  la fonction de répartition de la VAN à l'horizon  $t$ . La loi de  $VAN(t)$  peut être évaluée par l'estimation de la fonction de répartition en tout point, il s'agit alors d'évaluer pour  $t \geq \tau$  :

$$F_{VAN(t)}(u) = \mathbb{P}[VAN(t) \leq u]$$

où  $t$  est fixé et  $u > 0$ .

On a :

$$\begin{aligned} F_{VAN(t)}(u) &= \mathbb{P}\left[C_t^{(1)} - C_t^{(2)} \leq u\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\Gamma_u\left(\left(Z_s^{(1)}, Z_w^{(2)}\right)_{0 \leq s \leq t, 0 \leq w \leq t-\tau}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\Psi_u\left(\left(Z_n^{(1)}, Z_k^{(2)}\right)_{0 \leq n \leq N_t^{(1)}, 0 \leq k \leq N_{t-\tau}^{(2)}}\right)\right] \end{aligned} \quad \{1\}$$

où  $\Gamma_u$  et  $\Psi_u$  sont des fonctions inconnues,  $\left(Z_s^{(1)}\right)_{s \geq 0}$  est le processus  $(Z_t)_{t \geq 0}$  défini ci-dessus associé à la stratégie 1 et

$\left(Z_s^{(2)}\right)_{s \geq 0}$  celui de la stratégie 2.  $\left(Z_n^{(1)}\right)_{0 \leq n \leq N_t^{(1)}}$  et  $\left(Z_k^{(2)}\right)_{0 \leq k \leq N_{t-\tau}^{(2)}}$  sont les chaînes de Markov associées à chaque

processus et  $N_t^{(i)}$  le nombre de sauts de la chaîne sur une durée  $t$  dans la stratégie  $i$ . Comme nous pouvons l'observer sur la figure 2, la stratégie 2 ne diffère de la stratégie 1 qu'à partir de l'instant  $\tau$ . Elle sera alors évaluée sur la durée  $t - \tau$ .

Nous présentons différentes méthodes qui permettent de simuler la chaîne de Markov associée à chaque stratégie.

### Méthodes de simulation

#### 3 La méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est une méthode largement utilisée dans divers domaines pour résoudre des équations et évaluer des intégrales lorsqu'il n'est pas possible de le faire analytiquement. Dans notre cadre, le principe est de simuler de manière

indépendante un grand nombre d'histoires du parc de composants.

L'estimation de la loi de la Valeur Actuelle Nette sur un horizon de temps  $t$  fixé par la méthode MC revient à estimer l'intégrale d'une fonction. Comme présenté dans l'équation {1}, cette fonction dépend des chaînes de Markov qui décrivent l'évolution les deux stratégies jusqu'à l'horizon  $t$ . Pour chaque stratégie  $i \in \{1, 2\}$ , la chaîne de Markov  $\left(Z_n^{(i)}\right)_{n \geq 0}$  est définie par :

$$\begin{cases} Z_0^{(i)} \sim f(V^{(i)}) & V^{(i)} \sim \mathcal{U}([0, 1]^{m^{(i)}}) \\ Z_n^{(i)} = \phi_n(Z_{n-1}^{(i)}, U_n^{(i)}) & n \geq 1 \text{ et } U_n^{(i)} \sim \mathcal{U}([0, 1]) \end{cases} \quad \{2\}$$

où  $Z_0^{(i)} \sim f(V^{(i)})$  signifie que la loi initiale de la chaîne de Markov  $\left(Z_n^{(i)}\right)_{n \geq 0}$  dépend de  $m^{(i)}$  variables aléatoires uniformes sur  $[0, 1]$ .

Pour simuler l'évolution d'une stratégie jusqu'à l'horizon de temps par la chaîne de Markov, nous commençons par évaluer son état initial. Ensuite une transition est simulée à l'aide de l'état précédent de la chaîne de Markov et d'une variable aléatoire uniforme de dimension 1. La fonction de répartition de la  $VAN(t)$  peut alors s'écrire comme l'intégrale d'une fonction qui dépend de plusieurs variables aléatoires uniformes. Le nombre de variables est égal au nombre d'évènements qui se sont produits dans les deux stratégies jusqu'à l'horizon de temps  $t$ . Ces évènements peuvent caractériser les défaillances des composants, son nombre est alors lié à la loi de durée de vie des composants et est donc une variable aléatoire.

On déduit des équations {1} et {2} que la fonction de répartition de la VAN peut s'écrire :

$$\begin{aligned} F_{VAN(t)}(u) &= \mathbb{E} \left[ \Psi_{\phi, \cdot, u} \left( f(V^{(1)}), U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, \dots, U_{N_t^{(1)}}^{(1)}, f(V^{(2)}), U_1^{(2)}, U_2^{(2)}, \dots, U_{N_{t-\tau}^{(2)}}^{(2)} \right) \right] \\ &\simeq \mathbb{E} [\Psi_{f, \phi, \cdot, u}(W)] \end{aligned}$$

avec  $N_t^{(i)}$  la variable aléatoire représentant le nombre de sauts de la chaîne de Markov  $\left(Z_n^{(i)}\right)_{n \geq 0}$  sur la durée  $t$  pour la stratégie

$i$  et  $W \sim \mathcal{U}([0, 1]^{M+m^{(1)}+m^{(2)}})$ . On prend  $M$  tel que  $\mathbb{P}(N_t^{(1)} + N_{t-\tau}^{(2)} \geq M) < \varepsilon$  avec  $\varepsilon$  très petit.

La loi de la  $VAN(t)$  peut être estimée de la façon suivante :

$$\hat{F}_{VAN(t)}(u) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Psi_{f, \phi, \cdot, u}(w_i) \quad \{3\}$$

où  $\{w_1, \dots, w_N\}$  sont des réalisations d'une loi uniforme sur  $[0, 1]^{M+m^{(1)}+m^{(2)}}$ .

La fonction  $\Psi_{f, \phi, \cdot, u}$  étant inconnue, nous allons simuler l'évolution des chaînes de Markov définies en {2} associées à chaque stratégie de manière séquentielle grâce aux fonctions  $\phi_n$ ,  $n \geq 1$  jusqu'à  $t$ .

L'inconvénient principal de la méthode MC est le caractère aléatoire des estimations qu'elle fournit, avec une vitesse de convergence en  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ . Pour obtenir des résultats de plus en plus précis, il est nécessaire d'augmenter le nombre de simulations, ce qui induit une augmentation du temps de calcul. Une estimation stable et précise par la méthode MC est donc obtenue au prix d'un temps de calcul élevé. Dans une optique d'optimisation de stratégies d'investissements, cela pose un problème car, couplée à un algorithme d'optimisation testant de nombreuses stratégies candidates, les temps de calcul peuvent devenir prohibitifs. Les méthodes de quasi Monte-Carlo sont connues pour leur amélioration de la précision des estimations par rapport à la méthode MC. Cela peut donc théoriquement permettre d'obtenir des résultats plus précis avec moins de calculs.

## 4 La méthode de quasi Monte-Carlo

La méthode de quasi Monte-Carlo (QMC) est une méthode développée pour améliorer l'estimation fournie par la méthode MC. Elle consiste à remplacer un échantillon de points obtenu par une fonction pseudo-aléatoire sur  $[0, 1]^d$  par des points répartis plus uniformément sur  $[0, 1]^d$ . Le critère d'uniformité des points sur le pavé unitaire  $[0, 1]^d$  fait appel à la notion de la discrédance.

### 4.1 La notion de la discrédance

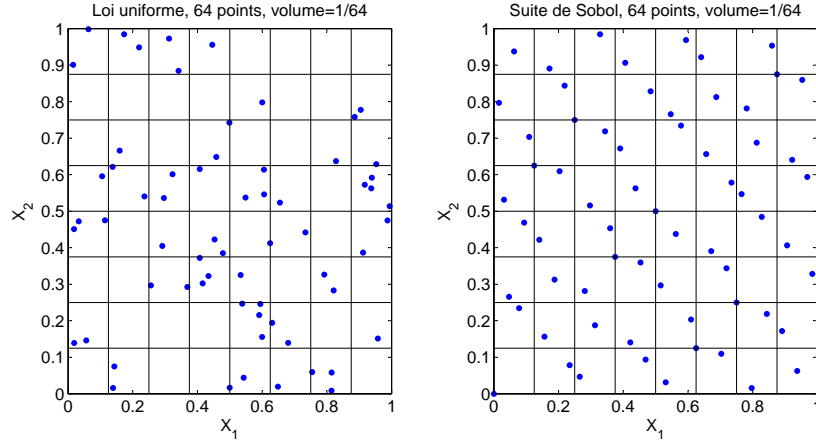
Niederreiter H. (Niederreiter, 1992) définit la discrédance comme étant une mesure de l'écart par rapport à une distribution uniforme. Ainsi, plus l'écart est faible ou plus la discrédance est faible, plus les points sont uniformément distribués sur  $[0, 1]^d$ . La discrédance est donc un indicateur permettant de mesurer la bonne répartition des points dans l'espace  $[0, 1]^d$ . De nombreuses suites ayant des bonnes propriétés d'uniformité ont été construites : ces suites sont appelées Suites à Faible Discrédance (SFD). Elles peuvent être réparties en deux groupes : les *lattice rules* et les *digital nets* (Lemieux, 2009). Les *lattice rules* sont des points obtenus par des combinaisons linéaires à coefficients d'entiers se trouvant dans l'espace  $[0, 1]^d$  et les *digital nets* sont des suites construites à l'aide de la décomposition d'entiers naturels en une certaine base  $b$ .

Dans les *digital nets*, on peut citer :

- la suite de Van Der Corput en dimension 1,
- la suite de Halton en dimension  $d \geq 1$ , qui est une généralisation de la suite de Van Der Corput,
- la suite de Faure en dimension  $d \geq 1$ ,

- la suite de Sobol en dimension  $d \geq 1$ .

Dans notre étude, nous utilisons la suite de Sobol.



**Figure 3.** Représentation de 64 points de la loi uniforme obtenue par tirage pseudo-aléatoire en dimension 2 (gauche) et de la suite de Sobol de dimension 2 (droite)

La figure 3 compare un échantillon de taille 64 d'une loi uniforme obtenue par tirage pseudo-aléatoire sur  $[0, 1]^2$  et les 64 premiers points de la suite de Sobol de dimension 2. Cette figure illustre bien la bonne répartition des points de la suite de Sobol par rapport à la loi uniforme car on observe plusieurs zones qui ne sont pas explorées par l'échantillon aléatoire.

## 4.2 Estimation de la VAN( $t$ ) par la méthode QMC

L'estimation de la fonction de répartition de la VAN à l'horizon  $t$  par la méthode QMC se fait en remplaçant dans  $\{3\}$  l'échantillon  $\{w_1, \dots, w_N\}$  de la loi uniforme sur  $[0, 1]^{M+m^{(1)}+m^{(2)}}$  par une SFD de dimension  $M + m^{(1)} + m^{(2)}$ , où  $M$  dépend du nombre de sauts de la chaîne dans les deux stratégies. Chaque élément de la SFD sera utilisé pour simuler une histoire de vie du parc. Contrairement aux variables uniformes utilisées pour les simulations de Monte-Carlo qui peuvent être tirées les unes après les autres, chaque élément de la SFD doit être construit avant la simulation de la chaîne. La dimension dépendant du nombre de sauts de la chaîne qui est inconnu car aléatoire, il est donc nécessaire de fixer à l'avance le nombre de sauts maximum dans les deux stratégies, c'est-à-dire les valeurs maximales des variables aléatoires  $N_t^{(1)}$  et  $N_{t-\tau}^{(2)}$ . Nous choisissons  $n^{(i)} \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathbb{P}\left(n^{(i)} > m^{(i)} + N_t^{(i)}\right) > 1 - \varepsilon$  pour  $\varepsilon > 0$  et  $i \in \{1, 2\}$ , et nous construisons une SFD de dimension  $n^{(1)} + n^{(2)} = M + m^{(1)} + m^{(2)}$ .

La fonction  $\Psi_{f, \phi, u}$  de  $\{3\}$  étant inconnue, nous allons simuler de manière séquentielle comme dans la méthode MC l'évolution de la chaîne de Markov de chaque stratégie en remplaçant les éléments de la loi uniforme par les composantes de la SFD.

Soit  $S$  une suite à faible discrédance de dimension  $n^{(1)} + n^{(2)}$ . On pose :  $u_k^{(1)} = S_k(1 : n^{(1)})$ , les  $n^{(1)}$  premières composantes du  $k^{\text{ème}}$  élément de la SFD  $S$  et  $u_k^{(2)} = S_k(n^{(1)} + 1 : n^{(2)})$ , les  $n^{(2)}$  dernières composantes du  $k^{\text{ème}}$  élément. Les éléments de la suite  $u_k^{(i)}$  seront alors utilisés pour simuler une histoire de la chaîne de Markov de la stratégie  $i$ . Les événements se produisant dans la stratégie 2 avant l'instant  $\tau$  sont les mêmes que ceux de la stratégie 1, ainsi la stratégie 2 est simulée à partir de l'instant  $\tau$ . L'initialisation de la chaîne de Markov de la stratégie  $i$  se fera donc à l'aide des  $m^{(i)}$  premières composantes de la suite  $u_k^{(i)}$ . Pour les transitions, on utilisera la composante suivante à chaque fois que l'on aura besoin d'une variable aléatoire uniforme et ainsi de suite jusqu'à l'atteinte de l'horizon.

Un des inconvénients de la méthode QMC est qu'elle perd de son efficacité lorsque la dimension de la SFD augmente. Dans notre cas, la dimension de la SFD dépend du nombre de sauts de la chaîne de Markov qui représente le nombre d'évènements qui se sont produits dans les deux stratégies. Lorsqu'il s'agit d'évaluer une stratégie d'investissements sur un parc important de composants, le nombre de sauts de la chaîne de Markov peut devenir grand. On se retrouve alors face à des problèmes de place mémoire. Pour pallier ce problème, une méthode adaptée à la simulation de chaînes de Markov a été développée. Il s'agit de la méthode Array Quasi Monte-Carlo (AQMC).

## 4.3 La méthode Array Quasi Monte-Carlo

Le principe de la méthode AQMC est de simuler plusieurs chaînes de Markov en parallèle à l'aide d'éléments d'une SFD et de mélanger les trajectoires de ces chaînes. Elle a été introduite par Lécot et Coulibaly (Lécot et al., 1998) pour simuler l'évolution de particules de gaz dans la résolution des équations de Boltzmann. Lors de la simulation, Lécot et Coulibaly rajoutent une étape de tri de particules à chaque pas de temps. Les éléments de la SFD sont utilisés pour évaluer la distribution des particules sur un pas de temps. Plus tard, Lécot et Tuffin (Lécot et al., 2002) et El Haddad, Lécot et L'Ecuyer (El Haddad et al., 2006) ont appliqué la méthode dans le cadre de la simulation de chaînes de Markov plus générales. L'étape importante de la méthode est l'introduction d'une dépendance entre les différentes trajectoires, de telle sorte que la distribution empirique de la chaîne de Markov simulée s'améliore à chaque saut. Cette dépendance est introduite par une fonction de tri croissant des trajectoires

à chaque étape de la chaîne de Markov. L'idée de ce tri est de mélanger les trajectoires afin que l'espace de la chaîne soit mieux visité. Contrairement à la méthode QMC où un élément de la SFD permet de simuler une trajectoire de la chaîne de Markov, dans la méthode AQMC, un élément de la SFD permet de simuler un saut d'une trajectoire de la chaîne de Markov. Ainsi la dimension de la SFD n'est plus liée au nombre de sauts de la chaîne de Markov mais est égale au nombre de variables aléatoires uniformes sur  $[0, 1]$  nécessaires pour simuler un saut de la chaîne de Markov. Cette caractéristique permet de réduire considérablement la dimension de la SFD lorsque le nombre de sauts de la chaîne de Markov est grand.

Pour évaluer par la méthode AQMC la distribution de la VAN sur l'horizon de temps fixé, nous simulons l'évolution de  $N$  chaînes de Markov pour chaque stratégie, définies en  $\{2\}$ , en parallèle. L'idée est de simuler le 1er saut des  $N$  chaînes, de trier les chaînes, de simuler le 2ème saut, de trier les chaînes... Les différents coûts associés à une stratégie étant évalués aux instants de sauts, les chaînes seront triées par ordre croissant sur les instants de sauts. De plus, la dépendance entre les coûts, de par l'historique commun aux deux stratégies, ne nous permet pas de les trier indépendamment. Nous présentons l'algorithme permettant d'évaluer la VAN par la méthode AQMC. Tout d'abord, nous pouvons remarquer dans  $\{2\}$  que le nombre de variables aléatoires uniformes sur  $[0, 1]$  nécessaire pour initialiser les chaînes et pour simuler leurs transitions sont différents. Nous considérons alors deux SFD  $P_0$  et  $P_1$  de dimension respective  $m^{(1)} + m^{(2)}$  et 1. Ainsi, les éléments de  $P_0$  seront utilisés pour initialiser les chaînes et ceux de  $P_1$  pour les transitions. On a les notations suivantes :

- $N$  le nombre de chaînes en parallèle,
- $P_0 = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$  :  $N$  éléments de la SFD de dimension  $m^{(1)} + m^{(2)}$  tels que  $v_k(1 : m^{(1)})$  représentent les  $m^{(1)}$  premières composantes de  $v_k$  et  $v_k(m^{(1)} + 1 : m^{(1)} + m^{(2)})$  ses  $m^{(2)}$  dernières composantes,
- $P_1 = \{u_1, u_2, \dots\}$  : les éléments de la SFD de dimension 1 tels que  $\mathbf{u}_{l_1:l_2} = \{u_{l_1}, u_{l_1+1}, \dots, u_{l_2}\}$ ,
- $\mathbf{Z}_n^{(i)} = \left( Z_{n,1}^{(i)}, Z_{n,2}^{(i)}, \dots, Z_{n,N}^{(i)} \right)$  : les états des  $N$  chaînes en parallèle de la stratégie  $i \in \{1, 2\}$  et  $\mathbf{Z}_n^{(i)}(1 : m)$  les  $m$  premiers états de  $\mathbf{Z}_n^{(i)}$ . Lorsqu'on note  $\mathbf{Z}_n^{(i)}(1 : m) = \phi_n \left( \mathbf{Z}_{n-1}^{(i)}(1 : m), \mathbf{u}_{l_1:(l_1+m-1)} \right)$  cela signifie que pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $Z_{n,k}^{(i)} = \phi_n \left( Z_{n-1,k}^{(i)}, u_{l_1+k-1} \right)$  avec  $\phi_n$  la fonction définie en  $\{2\}$ ,
- $\mathbf{Z}_{(n)}^{(i)} = \left( Z_{n,(1)}^{(i)}, Z_{n,(2)}^{(i)}, \dots, Z_{n,(N)}^{(i)} \right)$  : les éléments de  $\mathbf{Z}_n^{(i)}$  triés par ordre croissant par rapport aux instants de saut, c'est-à-dire  $Z_{n,(l_1)}^{(i)} \leq Z_{n,(l_2)}^{(i)}$  si  $T_{n,(l_1)}^{(i)} \leq T_{n,(l_2)}^{(i)} \quad \forall l_1, l_2$ .

On a alors les étapes suivantes :

*Initialisation de la stratégie 1*

- $\mathbf{Z}_0^{(1)} = \left( Z_{0,1}^{(1)}, Z_{0,2}^{(1)}, \dots, Z_{0,N}^{(1)} \right)$  tels que  $Z_{0,k}^{(1)} = f(v_k(1 : m^{(1)}))$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$
- Tri des chaînes suivant les instants de sauts, on obtient  $\mathbf{Z}_{(0)}^{(1)}$  et réétiquetage des chaînes  $\mathbf{Z}_0^{(1)} \leftarrow \mathbf{Z}_{(0)}^{(1)}$
- $m \leftarrow \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{\{T_{0,k}^{(1)} \leq \tau\}}$  le nombre de chaînes n'ayant pas encore atteint  $\tau$
- $n \leftarrow 1, l_1 \leftarrow 1$

*Tant que toutes les chaînes n'ont pas atteint  $\tau$ , c'est-à-dire tant que  $m \neq 0$*

- Simulation de l'étape suivante des chaînes qui n'ont pas atteint  $\tau$   
 $\mathbf{Z}_n^{(1)}(1 : m) = \phi_n \left( \mathbf{Z}_{n-1}^{(1)}(1 : m), \mathbf{u}_{l_1:l_1+m-1} \right)$  et  $l_1 \leftarrow l_1 + m$
- Tri des chaînes suivant les instants de sauts, on obtient  $\mathbf{Z}_{(n)}^{(1)}$  et réétiquetage des chaînes  $\mathbf{Z}_n^{(1)} \leftarrow \mathbf{Z}_{(n)}^{(1)}$
- $m \leftarrow \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{\{T_{n,k}^{(1)} \leq \tau\}}$  le nombre de chaînes n'ayant pas encore atteint  $\tau$
- $n \leftarrow n + 1$

A l'issue de cette boucle, toutes les chaînes ont atteint  $\tau$  et on peut à présent initialiser la stratégie 2. Cette initialisation dépend des états des composants dans la stratégie 1 à l'instant  $\tau$  et de l'investissement réalisé. On obtient alors :

*Initialisation de la stratégie 2*

- $\mathbf{Z}_0^{(2)} = \left( Z_{0,1}^{(2)}, Z_{0,2}^{(2)}, \dots, Z_{0,N}^{(2)} \right)$  tels que  $Z_{0,k}^{(2)} = f_{Z_{(0)}^{(1)}} \left( v_k(m^{(1)} + 1 : m^{(1)} + m^{(2)}) \right)$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$

On construit la chaîne couplée  $\mathbf{Z} = \left( \mathbf{Z}_{N_\tau^{(1)}}^{(1)}, \mathbf{Z}_0^{(2)} \right) = \left( \left( Z_{N_\tau^{(1)},1}^{(1)}, Z_{0,1}^{(2)} \right), \dots, \left( Z_{N_\tau^{(1)},N}^{(1)}, Z_{0,N}^{(2)} \right) \right)$  qui lie les chaînes ayant un même historique dans les deux stratégies. Pour simuler la chaîne couplée  $\mathbf{Z}$ , on va suivre les étapes de l'algorithme sans l'étape de l'initialisation en remplaçant  $\tau$  par  $t$ . Dans un premier temps, on va simuler la stratégie 1 jusqu'à l'horizon de temps  $t$ . Nous gardons la valeur finale de  $l_1$  car cela nous permet d'utiliser les termes suivants de la SFD  $P_1$ . Ainsi, les éléments de la chaîne couplée  $\mathbf{Z}$  seront triés par ordre croissant sur les instants de sauts de la chaîne dans la stratégie 1. Lorsque toutes les chaînes en parallèle ont atteint l'horizon dans la stratégie 1, la stratégie 2 est à son tour simulée jusqu'à l'horizon en utilisant les éléments suivants de la SFD  $P_1$ . Les deux stratégies peuvent être simulées l'une après l'autre grâce à l'hypothèse d'indépendance conditionnelle de leur évolution sachant l'état des composants et du stock à l'instant  $\tau$ . Les éléments de la chaîne couplée  $\mathbf{Z}$  seront triés par ordre croissant par rapport aux instants de sauts de la stratégie 2 jusqu'à l'horizon  $t$ . Toutes les chaînes ayant

ainsi atteint l'horizon dans les deux stratégies, la VAN sera estimée en effectuant la différence des coûts des éléments de la chaîne couplée  $\mathbf{Z}$ .

Les méthodes QMC et AQMC ne permettent pas d'estimer d'intervalles de confiance des estimations. Pour ce faire nous avons recours à des versions randomisées de ces méthodes.

## 5 Les méthodes de randomisation

Partant d'une SFD, les méthodes de randomisation consistent à construire des suites aléatoires qui respectent deux propriétés :

- chaque point de la suite doit avoir une distribution uniforme sur  $[0, 1]^d$
- la régularité des points doit être préservée (au sens de la discrédance).

Il existe plusieurs techniques permettant de randomiser les SFD. Nous présentons ci-dessous celle dont nous nous servons dans nos exemples numériques, d'autres se trouvant dans (Lemieux, 2009). La méthode dite "Random shift" est la plus facile à mettre en œuvre. Elle consiste à rajouter la même loi uniforme à tous les éléments de la suite et à prendre la partie fractionnaire de la somme. Plus précisément, nous considérons  $P_N = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N; \mathbf{u}_i \in [0, 1]^d\}$  un ensemble de points d'une SFD de dimension  $d$  et  $\tilde{P}_N = \{\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_N; \tilde{\mathbf{u}}_i \in [0, 1]^d\}$  sa version randomisée. Soit  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d) \sim \mathcal{U}([0, 1]^d)$ , alors :

$$\tilde{\mathbf{u}}_i = (\mathbf{u}_i + \mathbf{v}) \bmod 1$$

Les éléments de  $\tilde{P}_N$  permettent alors d'avoir une estimation de la quantité recherchée (par exemple l'espérance de la VAN). La variance et les intervalles de confiance sont estimés sur les  $J$  estimations obtenues en effectuant  $J$  randomisations indépendantes des éléments de  $P_N$ . Les méthodes RQMC et RAQMC, respectivement les versions randomisées des méthodes QMC et AQMC, dépendent alors de deux paramètres : le nombre de termes de la SFD et le nombre de randomisations indépendantes.

## Résultats numériques

### 6 Exemple d'un parc fictif

On considère  $m$  composants indépendants et identiques de loi de Weibull ( $\lambda = 60, \beta = 3$ ). Les composants ont un stock commun de pièces de rechange. Ils sont neufs à l'état initial et l'horizon de l'étude est de 60 ans.

**Définition 1** La fonction de répartition d'une loi de Weibull de paramètres  $\lambda$  et  $\beta$ , noté  $W(\lambda, \beta)$  est donnée par :

$$F(x) = \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\beta}\right) \times \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$$

#### 6.1 Stratégies à comparer

Les deux stratégies à comparer sont :

- La stratégie 1 (stratégie correctrice ou stratégie de référence)  
Elle consiste à remplacer un composant en panne par un composant neuf lorsqu'une pièce de rechange est disponible. Lorsque le stock est vide, le composant en panne devient indisponible.
- La stratégie 2 (stratégie préventive ou stratégie à évaluer)  
Elle consiste à remplacer préventivement tous les composants par des composants neufs à l'instant  $\tau = 20$  et à effectuer des remplacements correctifs.

#### 6.2 Logistique de stock

Le stock à l'instant initial est de 1. Le stock de pièces de rechange n'est utilisé que pour des remplacements fortuits : il s'agit donc d'un stock de sécurité. A chaque défaillance, une commande est lancée (gestion par point de commande). Le coût d'achat d'une pièce de rechange est facturé au moment de la commande et la durée d'approvisionnement est de 1 an.

#### 6.3 Données économiques

Le taux d'actualisation continu utilisé est de  $\alpha = 7.5\%$ . Si on note  $C$  un coût à l'instant  $t$  alors le coût actualisé à l'instant 0 est :  $C \times e^{-\alpha t}$ . Le coût d'indisponibilité quotidien par composant est  $c_{ind} = 160$ . Le remplacement correctif d'un composant induit un coût  $c_r = 190$ , hors achat de pièce de rechange. Le remplacement préventif est facturé à  $c_p = 190$ , hors achat de pièce de rechange. Le prix d'achat d'une pièce de rechange est  $c_A = 500$ .

L'objectif est d'évaluer la distribution de la VAN sur un horizon de 60 ans par les différentes méthodes précédemment présentées.

## 7 Comparaison des méthodes par l'erreur relative

Nous allons comparer tout d'abord les méthodes QMC et AQMC entre elles par rapport à leur erreur relative sur la valeur de référence de la VAN moyenne et de la loi de VAN à l'horizon  $t$ . Ensuite, nous les comparons à la méthode MC sur leurs versions randomisées. Cette comparaison est faite via l'erreur moyenne commise sur la VAN moyenne et sur la loi de VAN à l'instant  $t$  par les méthodes R(A)QMC et la méthode MC.

## 7.1 Erreur relative sur l'espérance de la VAN à l'horizon de temps $t$

Soient  $\mu = \mathbb{E}[VAN(t)]$  l'espérance de la VAN à l'horizon de temps  $t$  que l'on souhaite évaluer et  $\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N VAN_i(t)$  l'estimation de  $\mu$  par les méthodes (A)QMC. On définit l'erreur relative commise sur l'espérance de la VAN par :

$$\varepsilon = \left| \frac{\hat{\mu} - \mu}{\mu} \right|$$

Pour comparer les méthodes aléatoires (MC et R(A)QMC), on évalue l'erreur relative moyenne sur  $J$  simulations (resp. randomisations) indépendantes de la méthode MC (resp. (A)QMC). On a  $\varepsilon_j = \left| \frac{\hat{\mu}_j - \mu}{\mu} \right|$  où  $\hat{\mu}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N VAN_i^j(t)$  est l'estimation de  $\mu$  obtenue à la  $j^{ième}$  simulation de la méthode MC ou randomisation de la SFD dans les méthodes (A)QMC. L'erreur relative moyenne sur l'espérance de la VAN se définit alors par :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \varepsilon_j$$

## 7.2 Erreur relative sur la loi de $VAN(t)$

On considère un ensemble  $I = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_I}\}$  de  $n_I$  valeurs possibles de la  $VAN(t)$  tel que  $a_1 < a_2 < \dots < a_{n_I}$  et  $\mathbb{P}(VAN(t) \leq a_{n_I}) = \mathbb{P}(VAN(t) \leq a_1)$  soit proche de 95%. On note  $\epsilon_{a_j} = \left| \frac{\hat{P}_{VAN(t)}^{a_j} - P_{VAN(t)}^{a_j}}{P_{VAN(t)}^{a_j}} \right|$  avec  $P_{VAN(t)}^{a_j} = \mathbb{P}(VAN(t) \leq a_j)$  et  $\hat{P}_{VAN(t)}^{a_j} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{VAN_i(t) \leq a_j\}}$  l'estimation de  $P_{VAN(t)}^{a_j}$  par les méthodes (A)QMC.  $\epsilon_{a_j}$  représente l'erreur relative commise au point  $a_j$  sur la fonction de répartition de la  $VAN(t)$ . On définit l'erreur relative sur la loi de  $VAN(t)$  par :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{n_I} \sum_{j=1}^{n_I} \epsilon_{a_j}$$

Pour évaluer l'erreur moyenne sur la loi de  $VAN(t)$  par les méthodes R(A)QMC et la méthode MC, nous effectuons, comme dans le cas de la VAN moyenne,  $J$  simulations de la méthode MC ou randomisations de la méthodes (A)QMC et on obtient :

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \mathcal{E}_j$$

où  $\mathcal{E}_j$  est l'erreur commise sur la loi de à la  $j^{ième}$  simulation de la méthode MC ou randomisation des méthodes (A)QMC.

## 8 Cas à quatre composants

Nous présentons ici les résultats obtenus en considérant quatre composants indépendants ayant un stock commun. Les valeurs de référence sont obtenues en réalisant  $N = 10^8$  simulations de la méthode MC. Nous remarquons sur la figure 4 que les méthodes QMC et AQMC estiment bien la distribution de la VAN à 60 ans. L'erreur relative sur la loi de la VAN est de l'ordre de  $10^{-3}$  à  $N = 2^{19} = 524288$ . Lorsque l'on évalue l'espérance de la VAN à 60 ans, la convergence des méthodes est plus rapide. En effet, l'erreur relative sur l'espérance de la VAN devient inférieure à  $10^{-4}$  à partir de  $N = 2^{12} = 4096$  pour atteindre  $10^{-6}$  à  $N = 2^{20} = 1048576$ . Lorsqu'on observe leurs versions randomisées sur la figure 5, nous remarquons une convergence plus rapide des méthodes de quasi Monte-Carlo par rapport à la méthode MC. Pour  $J = 500$  simulations ou randomisations indépendantes, nous pouvons voir sur cette figure que pour une erreur relative sur l'espérance de la VAN de  $10^{-3}$ , nous avons besoin de  $N = 2^8$  réalisations des méthodes QMC et AQMC et de  $N = 2^{14} = 16384$  simulations de la méthode MC. Cela signifie que, pour obtenir ce niveau de précision sur l'évaluation de l'espérance de la VAN, les méthodes QMC et AQMC nécessitent  $2^6 = 64$  fois moins de trajectoires que la méthode MC. Nous pouvons aussi remarquer que la pente des méthodes R(A)QMC est plus forte que celle de la méthode MC. Ainsi, plus on aura des points, plus le facteur de gain des méthodes (A)QMC par rapport à la méthode MC sera grand. L'erreur moyenne sur la loi de la VAN des méthodes R(A)QMC reste aussi inférieure à celle de la méthode MC.

## 9 Cas à dix composants

Dans le cas de dix composants, nous avons évalué  $N = 10^9$  simulations pour obtenir les valeurs de référence. Sur la figure 6, nous remarquons une bonne estimation de l'espérance de la VAN et de la loi de la VAN par les deux méthodes déterministes avec une erreur relative qui converge bien vers 0. Toutefois, la méthode QMC rencontre des problèmes de place mémoire. En effet, la dimension de la SFD est liée au nombre de sauts de la chaîne de Markov, qui dépend du nombre de composants. Ce qui entraîne donc une augmentation de la dimension de la SFD de la méthode QMC nécessaire pour évaluer la distribution statistique de la VAN. On se retrouve ainsi face à des problèmes de place mémoire à partir de  $N = 2^{18} = 262144$ , ce qui n'est pas le cas de la méthode AQMC car la dimension de la SFD qu'elle utilise reste égale à 1. Lorsque nous comparons les versions randomisées des méthodes (A)QMC, nous remarquons une amélioration de l'erreur par rapport à la méthode de MC pour un même nombre de simulations.



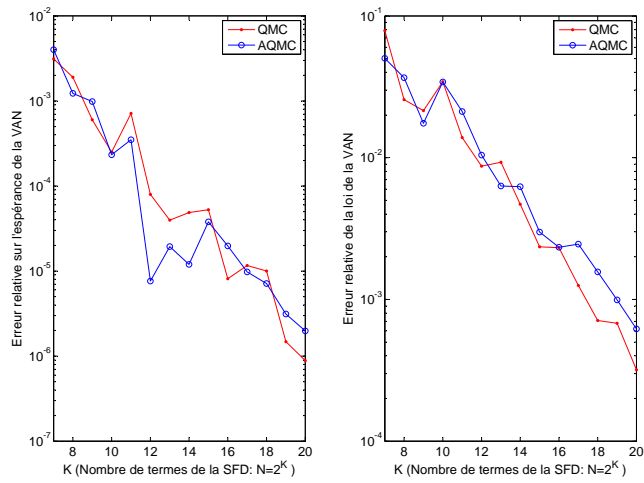


Figure 4. Erreur relative sur la VAN moyenne et la loi de la VAN à 60 ans des méthodes déterministes - 4 composants

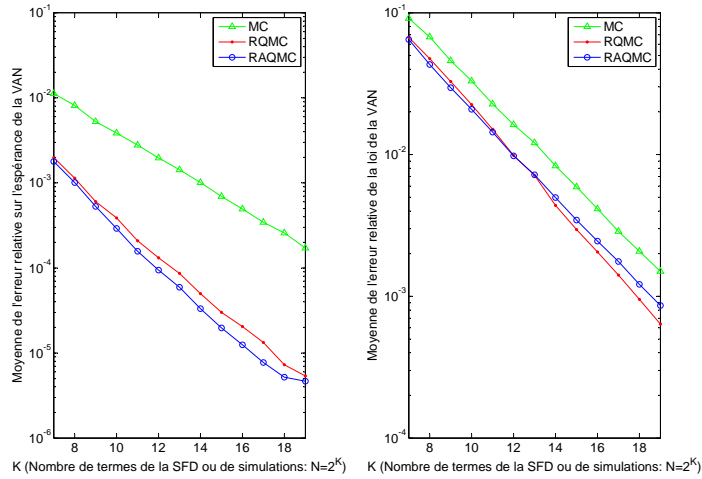


Figure 5. Erreur relative sur la VAN moyenne et la loi de la VAN à 60 ans des méthodes aléatoires - 4 composants

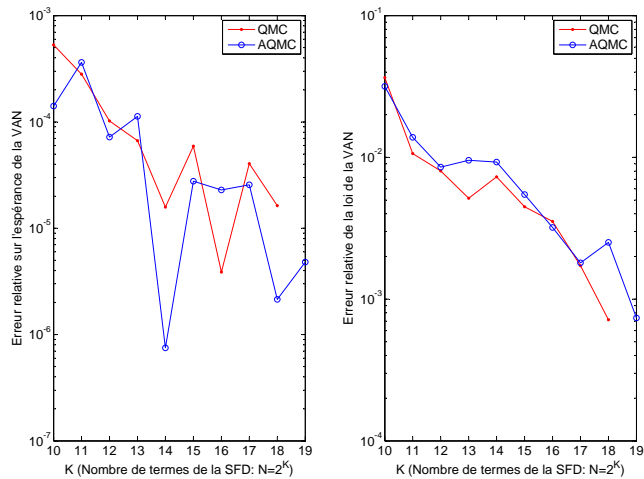
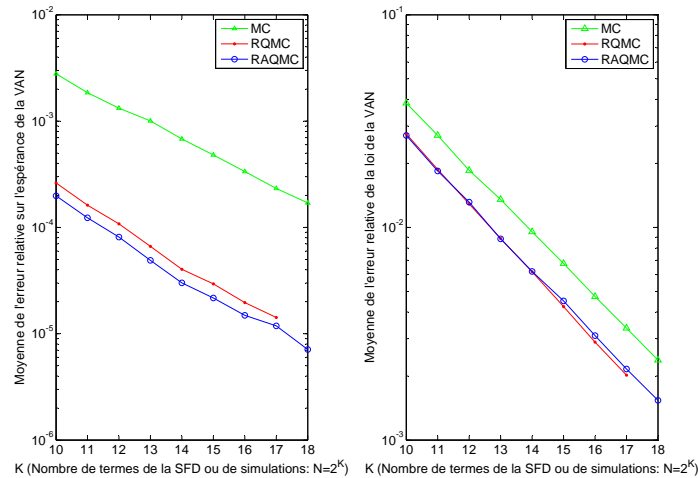


Figure 6. Erreur relative sur la VAN moyenne et la loi de la VAN à 60 ans des méthodes déterministes - 10 composants



**Figure 7.** Erreur relative sur la VAN moyenne et la loi de la VAN à 60 ans des méthodes aléatoires - 10 composants

### Conclusion

Nous avons présenté dans cet article, l'utilisation des méthodes de quasi Monte-Carlo pour évaluer la distribution statistique de la Valeur Actuelle Nette d'une stratégie d'investissements. De manière générale, nous observons une bonne estimation de la loi de la VAN par les méthodes QMC et AQMC que nous avons présentées. Néanmoins, lorsque le nombre de composants du parc augmente, la dimension de la SFD de la méthode QMC augmente. Des études théoriques (Cafisch, 1998) et quelques applications que nous avons effectuées montrent que la méthode QMC se dégrade lorsque la dimension de la SFD augmente. En plus de la dégradation de la méthode, on rencontre des problèmes de place mémoire pour stocker les éléments de la SFD. Quant à la méthode AQMC, la dimension de la SFD ne varie pas avec le nombre de composants du parc. Elle est donc plus adaptée à des parcs importants de composants car elle permet d'obtenir de bonnes estimations et la dimension de la SFD reste égale à 1. Pour une erreur fixée, nous remarquons dans les exemples que les méthodes (A)QMC nécessitent moins de simulations que la méthode MC. Nous obtenons alors des résultats précis plus rapidement qu'avec la méthode MC.

Il ressort de cette étude que les méthodes de quasi Monte-Carlo sont adaptées pour l'évaluation de stratégies d'investissements et plus performantes que la méthode MC. L'objectif final étant d'optimiser des stratégies d'investissements, il s'agit maintenant de les coupler à un algorithme d'optimisation et d'évaluer la vitesse convergence des simulations des méthodes.

### 10 Références

- Russel E. Cafisch, 1998, Monte-Carlo and quasi Monte-Carlo methods, *Acta Numerica*, 7, 1-49
- Davis M.H., 1984, Piecewise Deterministic Markov Processes: A general class of non diffusion stochastic models. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 46(3), 353-388.
- El Haddad R., Lécot C. et L'Ecuyer P., 2006, Quasi Monte-Carlo simulation of discrete-time Markov chains on multidimensional state spaces, *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods*, Springer, Berlin, 413-429.
- Eymard R., Mercier S., Prignet A., 2008, An implicit finite volume scheme for a scalar hyperbolic problem with measure data related to piecewise deterministic Markov processes, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 222(2), 293-323.
- Lair W., 2011, Modélisation dynamique de systèmes complexes pour le calcul de grandeurs fiabilistes et l'optimisation de la maintenance. Thèse, Université de Pau et des Pays de l'Adour.
- Lemieux C., 2009, Monte Carlo and Quasi Monte Carlo sampling, *Mathematics and Statistics*, Springer-Verlag New-York.
- Lécot C. et Coulibaly. I, 1998, A quasi-Monte Carlo scheme using nets for a linear Boltzmann equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 35, 51-70.
- Lécot C. et Tuffin B., 2002, Quasi Monte Carlo methods for estimating transient measures of discrete time Markov chains. *Monte Carlo and quasi Monte Carlo Methods*, Springer, Berlin, 329-344.
- Lonchamp J., 2005, Méthode matricielle de quantification des risques associés à la maintenance d'un composant par un modèle semi-markovien, *Congrès Qualita*.
- Niederreiter H., 1992, Random number generation and quasi Monte-Carlo methods, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia.